



## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ШЕСТИЗВЕННЫХ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ

И.А. Васильев (Центральный НИИ робототехники и технической кибернетики),  
А.М. Ляшин (Группа компаний "Аверс")

*Рассмотрено аналитическое решение обратной кинематической задачи для шестизвенных роботов-манипуляторов. Известны способы решения задачи геометрическими методами и численными. Здесь рассматривается метод решения задачи составлением системы нелинейных уравнений и решения ее в общем виде.*

Рассмотрим шестизвенные манипуляторы со всеми вращательными степенями свободы (шарнирами) как самые распространенные в робототехнике. В промышленности применяются манипуляторы и с другим числом степеней подвижности, но для трехзвенных задача решается тривиально, а для четырех- и пятизвенных также применим подход, описанный в данной статье.

Главная задача, возникающая при управлении манипуляторами, заключается в построении траекторий движения манипулятора [1]. Траектории могут задаваться либо в координатах сочленений (шарниров) – в обобщенных координатах, либо в параметрах положения и ориентации рабочего органа (захватного устройства, эффектора). Если используется второй способ, то для расчета управляющих сигналов для приводов параметры ориентации и положения рабочего органа должны быть преобразованы в параметры систем координат сочленений. Для манипуляторов со всеми вращательными степенями подвижности эти координаты сочленений являются углами в шарнирах.

По причине существенной нелинейности получаемых уравнений, которые связывают требуемые координаты захватного устройства и искомые углы в шарнирах, эту задачу решает численно. Есть два основных метода численного решения задачи. Первый метод применим лишь для простых кинематических схем, для которых можно манипулятор, условно говоря, разделить на части и для каждой из частей построить геометрическую схему [2]. В этом случае приходится рассмотреть некоторое число конфигураций и для каждой найти решение. Этот метод не гарантирует нахождения всех решений, так как каждую конфигурацию требуется рассматривать отдельно и некоторые конфигурации можно не учесть.

Другой численный метод более универсален. Он основан на малых перемещениях рабочего органа и построении матрицы Якоби [3]. Далее, полученные уравнения решаются, например, с помощью метода Ньютона. Так как метод приближенный, то применяется итеративная процедура последовательного приближения, что требует значительного времени на вычисления. Здесь требуется учитывать все особенности сходимости численного метода и погрешности определения решений. Также нет гарантии нахождения всех решений. Главный недостаток численного метода состоит в том, что время нахождения

каждого решения есть время сходимости численного метода решения системы уравнений. А сходимость сильно зависит от текущей конфигурации манипулятора.

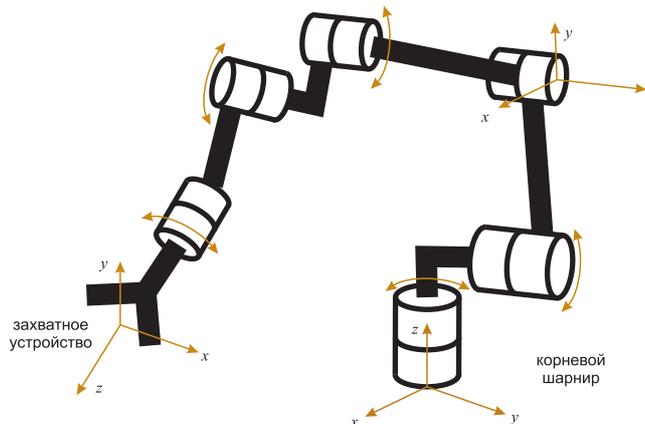
В настоящей работе предлагается метод аналитического нахождения решений обратной кинематической задачи. Аналитическое решение хорошо тем, что в результате получаются формулы зависимости углов в шарнирах манипулятора от целевого положения захватного устройства. Эти формулы программируются в систему управления роботом. Вычисления по ним занимают доли секунды.

Используя формализм Денавита-Хартенберга [4] строим системы координат для каждого звена манипулятора (рисунок). Затем определяются параметры каждого звена: длины, смещения, фазы и углы поворота осей. По этим параметрам производится построение матричного уравнения, связывающего углы в шарнирах с требуемыми координатами рабочего органа:

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = P, \quad (1)$$

где  $A_i$  – матрица (4x4) перехода от  $i+1$ -ой системы координат к  $i$ -ой, под седьмой системой координат понимаем систему координат, связанную с захватным устройством;  $P$  – матрица перехода из целевого положения в базовую систему координат. Без потери общности можно считать, что базовая система координат совпадает с системой координат первого шарнира (рисунок).

Если составить систему уравнений, производя элементарное приравнивание матриц слева и справа, то



Системы координат звеньев манипулятора

полученная система будет переопределенной. Для устранения этого недостатка необходимо провести параметризацию матриц, содержащую шесть параметров по числу неизвестных углов.

Для начала заметим, что уравнения, полученные путем приравнивания трех верхних элементов самого правого столбца, являются независимыми. Также заметим, что матрицы 3x3, полученные вычеркиванием правого столбца и нижней строки из матриц  $A_i$ , входящих в уравнение (1), являются ортогональными. Можно предложить три подхода, позволяющие записать три независимых уравнения, получающихся из условия равенства двух ортогональных матриц.

Первый заключается в параметризации обеих матриц с помощью углов Эйлера и приравнивания их. Приведем соотношения для углов Эйлера произвольной ортогональной матрицы:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arccos(P_{33}); \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{P_{32}}{\sin(\vartheta)}\right), & \text{если } \frac{P_{31}}{\sin(\vartheta)} \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{P_{32}}{\sin(\vartheta)}\right), & \text{иначе} \end{cases} \\ \psi &= \begin{cases} \arccos\left(-\frac{P_{23}}{\sin(\vartheta)}\right), & \text{если } \frac{P_{31}}{\sin(\vartheta)} \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(-\frac{P_{23}}{\sin(\vartheta)}\right), & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $P_{ij}$  – элемент матрицы с номерами  $i$  и  $j$ .

Заметим, что в случае неизвестных коэффициентов, преобразования (2) выглядят довольно громоздкими.

Второй подход заключается в преобразовании Кэли для матриц, выражающей левую и правую части системы (1) по формуле:

$$U = [1-T][1+T]^{-1}, \quad (3)$$

где  $T$  – одна из преобразуемых матриц. Преобразование (3) переводит ортогональную матрицу  $T$  в кососимметрическую и является обратимым. Заметим, что кососимметрическая матрица уже обладает тремя очевидными параметрами, а именно элементами  $U_{12}$ ,  $U_{13}$ ,  $U_{23}$ . Поэтому необходимые три уравнения можно получить приравниванием соответствующих трех элементов слева и справа. Однако заметим, что если спектр матрицы  $T$  содержит точку  $-1$ , то (3) становится неопределенным. Это обстоятельство привело нас к третьему способу сведения девяти уравнений к трем.

Для этого запишем условие равенства двух ортогональных матриц  $T_1$  и  $T_2$  в виде:

$$T_1 T_2^{-1} = I, \quad (4)$$

где  $I$  – единичная матрица 3x3. Матрица  $T = T_1 T_2^{-1}$  также является ортогональной. Теперь обратим внимание на то, что условие (4) можно записать как равенство единице любых двух диагональных элементов  $T$  при условии  $\det T = 1$ , чего всегда можно добиться путем соответствующего введения матриц  $A_i$

из (1). Докажем это. Без ограничения общности считаем, что это элементы  $T_{11}$  и  $T_{22}$ . Из соотношений:

$$\begin{aligned} T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2 &= 1 \\ T_{21}^2 + T_{22}^2 + T_{23}^2 &= 1 \end{aligned}$$

имеем  $T_{12} = T_{13} = T_{21} = T_{23} = 0$ . Теперь из этих условий и соотношений:

$$\begin{aligned} T_{11}^2 + T_{21}^2 + T_{31}^2 &= 1 \\ T_{12}^2 + T_{22}^2 + T_{32}^2 &= 1 \\ T_{13}^2 + T_{23}^2 + T_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

получим  $T_{31} = T_{32} = 0$ ,  $T_{33} = 1$ . Последнее следует из  $\det T = 1$ . Для удобства введены углы Эйлера для известной правой части уравнения (1).

Таким образом, задача свелась к решению пяти уравнений. Первые три из них получены путем приравнивания правых столбцов исходных матриц. А оставшиеся два путем приравнивания к единице любых двух диагональных элементов матрицы 3x3, которая получена путем умножения верхнего левого минора матрицы, содержащей неизвестные углы и такого же минора правой части (1), параметризованной углами Эйлера.

В процессе решения обратной задачи было замечено, что во многих уравнениях (довольно громоздких) есть конструкции, представляющие собой квадратный корень из неположительного числа. Так как удовлетворяющие нас решения должны быть только вещественными, то приравнивая подкоренное выражение нулю, получаем более простые соотношения.

Для вычислений применялась стандартная замена синусов и косинусов на тангенсы половинных углов, переводящая тригонометрические уравнения в алгебраические:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Для удобства будем обозначать тангенсы половинных углов буквой  $t$  с индексом соответствующего угла. Для повышения точности решений можно после превышения тангенсом некоторого значения (например,  $1 -$  то есть для  $45^\circ$ ) применять функцию, обратную тангенсу, то есть котангенс с аналогичным преобразованием.

При выводе уравнений было замечено, что при соответствующих заменах эти уравнения часто преобразуются в систему уравнений, которая относительно легко разрешается. Эта система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \sin(q_2) + a_2 \sin(q_{2,3}) = c_2 \\ \cos(q_2) + a_2 \cos(q_{2,3}) = c_3 \end{cases}, \quad (5)$$

где  $a_2, c_2, c_3$  – константы.

В этой системе важно, что коэффициенты у вторых слагаемых обоих уравнений одинаковые.

Данный подход был проверен для нескольких кинематических схем шестизвенных манипуляторов.

Приведем пример для одной конкретной кинематической схемы. Матрица направляющих косинусов левой части уравнения после выполнения преобразований и упрощений выглядит следующим образом (6).

$$\begin{pmatrix} C_5 C_6 S_1 + C_1 (C_{234} S_6 - S_{234} C_6 S_5) & C_1 (C_{234} C_6 + S_{234} S_5 S_6) - C_5 S_1 S_6 & S_{234} C_1 C_5 + S_1 S_5 \\ C_{234} S_1 S_6 - C_6 (C_1 C_5 + S_{234} S_1 S_5) & S_6 (C_1 C_5 + S_{234} S_1 S_5) + C_{234} C_6 S_5 & S_{234} C_5 S_1 - C_1 S_5 \\ -C_{234} C_6 S_5 - S_{234} S_4 & -S_{234} C_6 + C_{234} S_5 S_6 & C_{234} C_5 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $C_i = \cos(q_i)$ ,  $S_i = \sin(q_i)$ ;  $C_{234}$ ,  $S_{234}$  – синус и косинус суммы 2, 3 и 4-го углов.

$$\begin{pmatrix} -S_1 d_{23} + C_1 (a_2 S_2 + a_3 S_{23} + a_4 S_{234} + d_5 C_{234}) + d_6 (C_1 C_5 S_{234} + S_1 S_5) \\ C_1 d_{23} + S_1 (a_2 S_2 + a_3 S_{23} + a_4 S_{234} + d_5 C_{234}) + d_6 (C_5 S_1 S_{234} - C_1 S_5) \\ a_2 C_2 + a_3 C_{23} + d_1 - d_5 S_{234} + C_{234} (a_4 + d_6 C_5) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$t_{234} = -\frac{S_9 (2C_\psi t_1 + S_\psi (t_1^2 - 1))(t_5^2 - 1) + \sqrt{-(2(t_1^2 + 1)t_5 + S_9 (C_\psi + 2S_\psi t_1 - C_\psi t_1^2))(t_5^2 + 1)^2}}{(1 + C_9)(t_1^2 + 1) + 2S_9 (C_\psi + 2S_\psi t_1 - C_\psi t_1^2)t_5 + (C_9 - 1)(t_1^2 + 1)t_5^2}, \quad (8)$$

где  $t_i = \tan(q_i/2)$ ,  $C_\psi$ ,  $C_9$ ,  $S_\psi$ ,  $S_9$  – синусы и косинусы соответствующих углов Эйлера целевого положения.

Вектор-столбец декартовых координат захватного устройства выглядит следующим образом (7).

Далее, выполняя некоторые преобразования для выражения углов друг через друга, получаем формулу (8).

Эта формула показывает зависимость суммы второго, третьего и четвертого углов от первого и пятого углов. Здесь видно, что под знаком радикала в числителе (8) стоит неположительное число.

Так как значения углов могут быть только вещественными, то подкоренное выражение должно быть нулем. Следовательно, приравнявая его нулю, сразу получаем зависимость пятого угла от первого (9).

$$t_5 = \frac{2 + 2t_1^2 \pm \sqrt{(2 + 2t_1^2)^2 - 4(C_\psi S_9 + 2S_9 S_\psi t_1 - C_\psi S_9 t_1^2)}}{2(C_\psi S_9 + 2S_9 S_\psi t_1 - C_\psi S_9 t_1^2)} \quad (9)$$

$$t_1 = \frac{-p_1 + S_9 S_\psi d_6 \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - (d_2 + d_3)^2 + S_9 d_6 (2p_2 C_\psi - 2p_1 S_\psi + S_9 d_6)}}{p_2 + d_2 + d_3 + C_\psi S_9 d_6}, \quad (10)$$

где  $p_1$ ,  $p_2$  – абсцисса и ордината целевого положения захватного устройства;  $d_i$  – длина  $i$ -го звена.

$$t_2 = \frac{8f_2 a_2^2 \pm \sqrt{8(1 + 4f_2^2 + f_3^2)a_2^2 a_3^2 - 4a_3^4 - 4(4f_2^2 + f_3^2 - 1)^2}}{2(4f_2^2 + (1 + f_3)^2)a_2^2 - 2a_3^2}; \quad (11)$$

$$t_{23} = \frac{8f_2 a_2 a_3 \pm \sqrt{8(1 + 4f_2^2 + f_3^2)a_2^2 a_3^2 - 4a_3^4 - 4(4f_2^2 + f_3^2 - 1)^2}}{2(4f_2^2 + f_3^2 - 1)a_2^2 + 2f_3 a_2 a_3}$$

$$t_6 = \frac{C_9 S_9 \sin(\psi - q_1) C_{234} + S_9 S_\psi S_{234} - C_\psi \cos(\psi - q_1) C_{234}}{C_9 \cos(\psi - q_1) S_\psi C_5 + C_\psi \sin(\psi - q_1) C_5 + S_9 S_\psi C_{234} S_5 + C_\psi \cos(\psi - q_1) S_5 S_{234} - C_9 S_\psi \sin(\psi - q_1) S_5 S_{234}} \quad (12)$$

Приравнявая вектор-столбец декартовых координат левой части уравнения к соответствующему вектору-столбцу целевого положения и подставляя в него полученную зависимость (9) получаем результат для первого угла (10).

Далее, воспользуемся описанной особенностью (5) и получаем решение для второго угла и суммы второго и третьего углов (11).

Затем, приравнявая диагональный элемент к единице, получаем решение для шестого шарнира, являющегося степенью чистого вращения кисти (12).

Данные формулы позволяют найти все решения (если таковые существуют) для целевого положения захватного устройства. Для гарантии отсеивания неверных решений при программной реализации производится проверка полученных решений подстановкой их в прямую кинематическую задачу и сравнением левой и правой частей в выражении (1).

Вычисления проводились с применением системы символьных вычислений Mathematica 5.1. На разработку решения для конкретной кинематической схемы (совместно с программированием) требуется

порядка одного рабочего дня. Чистое время преобразований в Mathematica 5.1 занимает около 2...3 ч.

Данный подход решения обратных кинематических задач применялся для трех разных кинематических схем. Было замечено, что методы и приемы очень сходны. То есть во всех случаях возникали конструкции типа "неположительное число под радикалом", которые сильно упрощали вычисления и соотношения типа (5). Возникает предположение о том, что данные особенности имеют место для большинства кинематических схем, допускающих аналитическое решение. Однако это требует дополнительного исследования.

**Список литературы**

1. Шахинур М. Курс робототехники. М.: "Мир".1990.
2. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Управление роботами. М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
3. Ноф Ш. Справочник по промышленной робототехнике. Т. 1. М.: Машиностроение.1990.
4. Denavit J., and Hartenberg R.S. A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices, ASME Journal of Applied Mechanics, 77, June 1955.

*Васильев Иван Анатольевич – начальник лаборатории Центрального НИИ робототехники и технической кибернетики;*

*Ляшин Андрей Михайлович – начальник отдела информатизации Группы компаний "Аверс".*

*Контактные телефоны (812) 552-07-80, (921) 372-04-28. E-mail: vas@rtc.ru andrey.lyashin@mail.ru*