Математическая модель принятия решений в экстремальной ситуации

А.Л. Венгер (Государственный университет «Дубна»)

Предлагается математическая модель, описывающая поведение человека, принимающего решение в условиях экстремально высокой вероятности катастрофы, а также при крайней ограниченности времени. В соответствии с байесовским подходом предполагается, что субъект стремится выбрать тот вариант поведения, при котором достигает минимума субъективная оценка вероятности катастрофы. Рассматривается влияние индивидуальных стратегий на характер принимаемых решений[1].

Ключевые слова: математическая модель, принятие решений, экстремальная ситуация, байесовский подход, субъективная вероятность, индивидуальные стратегии.

Введение

В теории принятия решений традиционно рассматриваются ситуации, в которых выбор того или иного варианта поведения определяется его «полезностью» для субъекта, принимающего решение. При этом предполагается, что человек может приблизительно оценить как «полезность» возможных результатов принимаемого решения, так и их вероятность. Подобные оценки анализируются в рамках байесовского подхода, основанного на понятии «субъективной вероятности», то есть степени уверенности субъекта в наступлении тех или иных последствий своих решений [1].

В ряде работ учитывается возможность катастрофического события — «разорения». При принятии решения вероятность такого события должна быть сведена к минимуму. Действие, при котором она превышает некоторую заранее заданную величину, считается недопустимым, сколь бы высока ни была его «полезность» [2]. Однако в рамках указанного подхода не анализировалось влияние индивидуальных стратегий на характер решений, принимаемых в ситуации, когда вероятность катастрофы экстремально высока. Между тем, этот вопрос является очень актуальным применительно к деятельности оператора, управляющего сложными и опасными технологическими процессами. Именно в такой ситуации ему приходится принимать решения при высокой вероятности наступления аварии и тем более в процессе уже начавшей развиваться аварии.

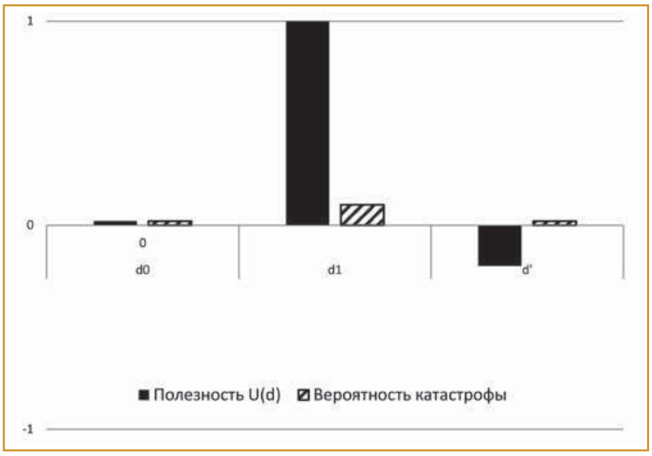

Рис. 1. Ожидаемая полезность и субъективная вероятность катастрофы при разных решениях

Стратегии принятия решений

В предыдущих статьях [3, 4] нами была предложена математическая модель принятия решения в ситуациях, связанных с риском катастрофы (неприемлемого ущерба). Модель предусматривала выбор из трех вариантов поведения: d_1 — действие с ожидаемой полезностью $U(d_1) > 0$; d_0 — бездействие (ожидаемая полезность $U(d_0) = 0$); d' — сбор дополнительной информации. Ожидаемая полезность $U(d')$ отрицательна, так как это действие требует затраты сил и времени, но в некоторых случаях оно необходимо как предварительное условие, без которого не может быть осуществлено действие d_1.

Предполагалось, что действия d_0 и d' безопасны, тогда как действие d_1 сопряжено с маловероятным, но не нулевым риском катастрофического результата, обозначаемого как $r^\wedge$ (рис. 1). Модель строилась на основе байесовского подхода, описывающего оценку риска в терминах субъективной вероятности. Субъективная вероятность катастрофы при условии выбора действия d_1 задается распределением вероятностей $P(r^\wedge|d_1)$. Это распределение основано на ряде проведенных субъектом наблюдений (то есть действий по сбору информации d').

Каждое i-е наблюдение — это получение информации о результатах совершения кем-либо действия d_1, рассматриваемое как испытание Бернулли, то есть такое испытание, результат которого принимает значение $X_i = 0$, если действие закончилось благополучно, и $X_i = 1$, если оно закончилось катастрофой [1]. В соответствии с законом следования Лапласа, ожидаемая вероятность катастрофы составляет:

$$p = \frac{\sum X_i + 1}{G + 2}, \tag{1}$$

где G — субъективная оценка числа проведенных испытаний Бернулли (предполагается, что их точного числа субъект не помнит).

Действие d_1 будет осуществляться в том случае, если субъект уверен, что оно достаточно безопасно, то есть его вероятность не превосходит некоторой индивидуальной константы ε (где $0 < \varepsilon << 1$). Такая

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-010-00291.

уверенность обеспечивается в том случае, когда: а) оценка вероятности катастрофы $p < \varepsilon$; б) ожидаемая ошибка этой оценки достаточно мала. Поскольку ошибка обратно пропорциональна $\sqrt{G}$, второе условие обеспечивается при достижении достаточно больших значений G, а именно:

$$G \geq \frac{\eta^2 p}{(\varepsilon - p)^2}, (2)$$

где $\eta \in (0, \infty)$ — еще одна индивидуальная константа [1].

Из указанных соотношений вытекает, что действие d' будет выбираться в том случае, когда выполняется условие (1), но не выполняется условие (2), и следовательно, для подтверждения безопасности действия d_1 требуется сбор дополнительной информации. В работе [3] рассмотрены также некоторые особые случаи, при которых сбор информации проводится без достижения условия (1).

Таким образом, стратегия субъекта характеризуется значениями двух индивидуальных констант ε и η (таблица). Как видно из таблицы, возможны четыре стратегии принятия решений.

1. При *стратегии разумного риска* (высокие значения как ε, так и η) субъект готов принимать решения, несмотря на относительно высокую вероятность катастрофического исхода. Однако он идет на это, лишь надежно убедившись, что эта вероятность действительно не превышает допустимого для него уровня ε.

2. При *стратегии экстремального риска* (высокие значения ε, низкие значения η) субъект готов принимать решения, несмотря на относительно высокую вероятность катастрофического исхода. При этом он не тратит времени на то, чтобы тщательно проверить, действительно ли она не превышает допустимого для него уровня ε.

3. При *стратегии стабильного избегания риска* (низкие значения ε, высокие значения η) субъект принимает решения, лишь надежно убедившись в том, что вероятность катастрофического исхода крайне низка.

4. При *стратегии избирательного избегания риска* (низкие значения как ε, так и η) субъект не готов принимать решения, связанные с высоким риском катастрофического исхода. Однако он не тратит времени на тщательную проверку того, действительно ли в каждом конкретном случае вероятность катастрофы достаточно мала. Вследствие этого иногда его решения могут объективно оказываться высоко рискованными.

Таблица. Стратегии принятия решения в зависимости от соотношения индивидуальных констант ε и η

Значения η	Значения ε: высокие	Значения ε: низкие
высокие	Разумный риск. Плюсы: устойчивость к опасности; обоснованность принимаемых решений. Минусы: длительность принятия решения; низкая толерантность к неопределенности	Стабильное избегание риска. Плюс: предельная безопасность и обоснованность решений. Минусы: длительность принятия решения; низкая толерантность к опасности и к неопределенности
низкие	Экстремальный риск. Плюсы: быстрота принятия решений; толерантность к опасности и к неопределенности. Минус: необдуманные опасные решения	Избирательное избегание риска. Плюсы: быстрота принятия решений; толерантность к неопределенности. Минусы: необдуманные действия; неустойчивость к опасности

Разумный риск - самая похвальная сторона человеческого благоразумия.
Джордж Сэвил Галифакс

С психологической точки зрения, обе фигурирующие в модели индивидуальные константы отражают уровень личностной тревожности. Таким образом, в едином понятии («тревожность») выделяются две существенно различные характеристики: максимально допустимая для субъекта вероятность катастрофы и степень уверенности в своей оценке этой вероятности. О подобном «расщеплении» понятий писали Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн: «Не нужно забывать, что этот процесс (формирования математических моделей — *А. В.*) весьма индивидуален и содержит множество этапов, которые трудно предвидеть. Одним из важных этапов является, например, «распутывание» понятий, то есть расщепление некоторых вещей, которые при поверхностном рассмотрении кажутся представляющими одну физическую величину, на несколько математических понятий» [5, с. 47].

Влияние значимости катастрофы на принятие решения

Описанная модель страдает рядом ограничений. В частности, в ней рассматривается только один вариант «содержательного» действия: d_1. В действительности, разумеется, существует множество возможных действий. Что будет, если действие с наиболее высокой полезностью оказалось сопряжено со слишком высокой вероятностью катастрофы? Во многих случаях вместо него может быть предпринято некое паллиативное действие d_2 с менее высокой полезностью, но более безопасное.

Пример1. Подобная ситуация воспроизведена в романе Ж. Арно «Плата за страх» и снятом по нему фильме. Чтобы погасить пожар на нефтяной скважине, необходимо доставить к ней нитроглицерин и устроить направленный взрыв. Везти его надо на грузовике по очень сложной дороге. Велика вероятность того, что по пути нитроглицерин от тряски взорвется. В данном случае бездействие d_0 неизбежно приводит к катастрофе: продолжающемуся пожару. Действие d_1 также со слишком большой вероятностью приводит к катастрофе, то есть $p_1 > \varepsilon$. Тогда нефтяная компания решает отправить два грузовика с нитроглицерином (действие d_2). Благодаря этому ожидаемая вероятность катастрофы резко снижается: вероятность того, что взорвутся оба грузовика, составляет $p_2 = p_1^2$. Разумеется, и полезность сильно снижается: $U(d_2) < U(d_1) < 0$ (поскольку вариант бездействия недопустим, приходится осуществлять действие с отрицательной полезностью). Заметим также, что гибель водителя представители компании не рассматривают как катастрофу, так что теперь степень риска становится допустимой: $p_1^2 < \varepsilon$.

Этот пример можно проинтерпретировать и иначе, рассматривая гибель одной машины из двух как «частичную катастрофу», которую можно допустить с более высокой вероятностью, чем в случае, когда машина только одна. Другими словами, это катастрофа с менее высокой значимостью. При такой интерпретации изменяется значение не p, а ε, что описывается выражением, тождественным предыдущему: $p_1 < \varepsilon^{1/2}$.

Пример 2. Представление о катастрофах разной значимости имеет и более общее значение. Например, выбирая между дорогой, где сам погибнешь, и дорогой, где «сам жив останешься, а коня потеряешь», Иван-царевич, разумеется, выбирает вторую. Если принять значимость (*англ. significance*) собственной гибели за единицу, то значимость гибели коня представлена величиной $Sig < 1$, и максимальная допустимая вероятность такой потери составит ε^{Sig}.

Пример 3. Возможны и случаи, когда $Sig > 1$ («сверхзначимая катастрофа»). Так, лодочник, собиравшийся в бурю перевозить нашу группу через Онежское озеро, отказался от этого, увидев, что в группе есть дети. «Э, нет,— сказал он,— в такую бурю и потонуть можно, а подвергать опасности детей я не стану». Если принять значимость для него гибели взрослых людей, включая его самого, за единицу, то значимость гибели детей явно была выше, то есть оказались выполнены соотношения: $\varepsilon^{Sig} < p_1 < \varepsilon$; $Sig > 1$. Мы же, в отличие от него, не имели опыта и, вероятно, сильно недооценили вероятность катастрофы. Можно полагать, что лодочник принимал решение в соответствии со стратегией *разумного риска* (высокие значения как ε, так и η), а мы — со стратегией *избирательного избегания риска* (низкие значения как ε, так и η).

Принятие решений в аварийных ситуациях

Рассмотрим теперь аварийную ситуацию, когда бездействие d_0, как и в примере 1, ведет к неизбежной катастрофе, и действие d_1 тоже с высокой вероятностью ведет к катастрофе, но нет возможности гарантированно снизить ее вероятность. При этом ожидаемое время, оставшееся до катастрофы, слишком мало, чтобы можно было надеяться набрать информацию, достаточную для выполнения условий (1), (2).

Пример 4. Представим себе нередкую в кинофильмах (боевиках) ситуацию, когда недостаточно опытный сапер должен обезвредить бомбу, перерезав один из проводов — красный или синий. На основе некоторых априорных представлений он полагает, что до взрыва осталось время T, однако эта оценка очень приблизительна. Перерезав не тот провод, он вызовет немедленный взрыв.

Предположим, что сапер имеет возможность собирать информацию о проводах (действие d'), либо тщательно прослеживая, куда идет каждый из них, либо созваниваясь с коллегами, которым уже приходилось иметь дело с подобными бомбами. Примем время, необходимое для отдельного испытания X_i, за единицу. В этих единицах и измерен интервал времени T. Никакой дополнительной информации, уточняющей оценку этого интервала, сапер получить не может. Для определенности будем считать априорную вероятность того, что нужный провод — красный, выше, чем априорную вероятность противоположного варианта. То есть $p_1 < p_2$, где p_1 — математическое ожидание вероятности взрыва при перерезании красного провода (действие d_1), p_2 — при перерезании синего. Ограничимся случаем, когда полученная до сих пор информация поддерживала это представление, а исходная априорная вероятность $p_{1,0}$ равнялась ½.

Итак, выбор проводится между действием d_1 и действием d'. Математическое ожидание вероятности катастрофы при действии d_1 равно p_1. При действии d' ожидаемая вероятность катастрофы p' — это вероятность того, что взрыв произойдет в ближайшую единицу времени (то есть на сбор информации времени не остается). Пусть, как и ранее, $P(r\hat{}|d_1)$ — распределение, отражающее субъективную вероятность катастрофы при условии выбора действия d_1. Его естественно рассматривать как двухпараметрическое β-распределение, являющееся сопряженным априорным распределением для биномиального распределения [1]: $P(r\hat{}|d_1) \sim B(\alpha, \beta)$. Математическое ожидание p_1 и дисперсия D_1 определяются соотношениями:

$$p_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta};$$

$$D_1 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

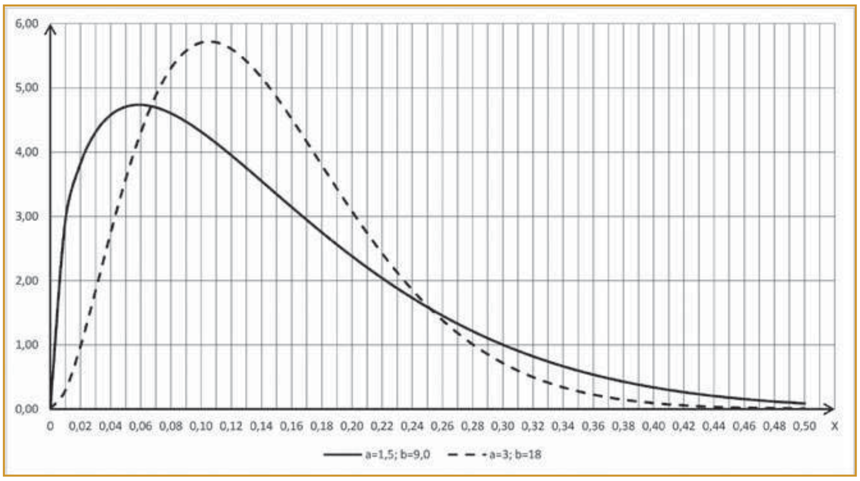

Рис. 2. Плотность вероятности β-распределения

Дисперсия характеризует степень субъективной неопределенности оценки значения p_1 и может рассматриваться как величина, однозначно связанная с константой η: чем выше требуемая степень определенности, тем больше субъективная неопределенность.

Субъективную вероятность катастрофы (перерезание красного провода приведет к взрыву), обозначим через p. В данной модели в качестве безопасных рассматриваются события, вероятность которых не превосходит ε. Следовательно, $1 - p$ (вероятность успеха) представляет собой значение функции распределения $P(r\hat{}|d_1)$ в точке ε. Рассматривается ситуация, в которой дефицит времени не позволяет достичь условий (1), (2). Поэтому можно утверждать, что субъективная вероятность успеха $1 - p$ растет с ростом как ε, так и D_1, а следовательно, и η. Соответственно с ростом этих констант субъективная вероятность катастрофы p убывает. Это проиллюстрировано на рис. 2, где представлена плотность вероятности β-распределений с параметрами α=1,5; β=9,0 (сплошная линия) и ε=3,0; β=18,0 (штриховая линия). Математическое ожидание обоих распределений одинаково и составляет p_1=0,14 (у β-распределения мода, вообще говоря, не совпадает с математическим ожиданием). Дисперсия же у первого β-распределения почти вдвое выше, чем у второго (0,011 и 0,006 соответственно).

Как видно из графиков, интеграл от 0 до x (площадь соответствующей криволинейной трапеции) при малых значениях x значительно больше у плотности распределения с высокой дисперсией, что соответствует высоким значениям индивидуальной константы η. У человека с такой стратегией более неопределенные представления о степени безопасности действия d_1. Поэтому он может как сомневаться в безопасности действия, даже когда есть основания считать вероятность катастрофы низкой ($p_1 < \varepsilon$), так и надеяться на благоприятный исход, даже когда есть основания полагать ее высокой ($p_1 > \varepsilon$).

Для описания оценки времени, оставшегося до катастрофы, может быть использовано двухпараметрическое распределение Вейбулла. Оно широко применяется в технике для моделирования распределения времени работы какого-либо устройства до его поломки [6], позволяет оценивать время дожития человека в зависимости от его возраста [2] и т. п.

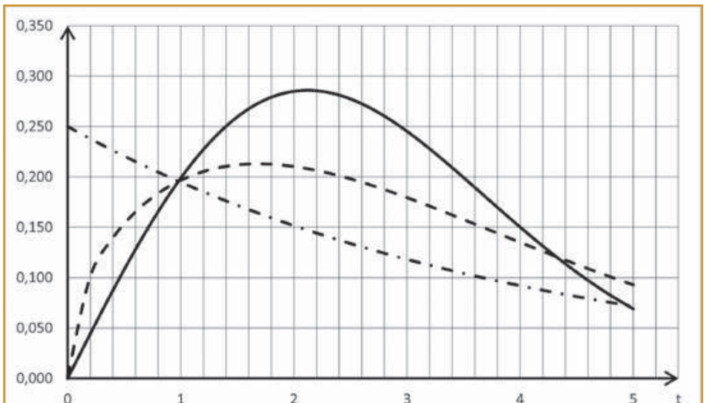

Рис.3. Плотность вероятности распределения Вейбулла

Итак, рассмотрим функцию распределения вероятности катастрофы во времени $P(r\hat{}|d') \sim W(a,b)$. Имеется в виду субъективная вероятность наступления катастрофы за то время, что проводится сбор информации о степени опасности/безопасности действия d_1. Ее математическое ожидание, ранее обозначенное через T, определяется по формуле:

$$T = b\Gamma(1 + 1/a),$$

где Γ — гамма-функция.

Дисперсия составляет

$$D' = b^2\left[\Gamma(1+2/a) - \Gamma^2(1+1/a)\right].$$

Субъективную вероятность того, что катастрофа наступит за время, не превышающее единицу (то есть не большее, чем необходимо для получения минимальной информации), мы обозначили через p'. При заранее заданном математическом ожидании времени наступления катастрофы T субъективная вероятность p' не зависит от ε и растет с ростом D'. Это иллюстрируют графики плотности вероятности распределения Вейбулла, представленные на рис. 3. Показаны распределения с параметрами $a = 2$; $b = 3$ (сплошная линия), $a = 1{,}5$; $b = 3{,}5$ (штриховая линия), $a = 1$; $b = 4$ (штрих-пунктир). Соответствующие математические ожидания составляют $T_1 = 2{,}7$; $T_2 = 3{,}2$; $T_3 = 4{,}0$, а дисперсии — $D'_1 = 1{,}9$; $D'_2 = 4{,}6$; $D'_3 = 16{,}0$.

Субъективная вероятность немедленного (не более чем за единичное время) наступления катастрофы p' — это интеграл соответствующей функции от 0 до 1. Для первого распределения он равен 0,11, для второго — 0,14, для третьего — 0,22. Таким образом, в данном случае различие дисперсий сыграло даже большую роль, чем различие математических ожиданий: ведь среднее ожидаемое время взрыва было наибольшим у третьего распределения и наименьшим — у первого.

Конкретный вид распределения Вейбулла, описывающего субъективную вероятность времени наступления катастрофы (аварии), зависят не только от индивидуальных особенностей субъекта (значения индивидуальной константы η), но и от типа ситуации. Так, если у сапера из нашего примера нет никакой информации, кроме некоторого априорного (интуитивного) представления о математическом ожидании времени взрыва, то наиболее правдоподобным приближением будет однопараметрическое экспоненциальное распределение [6]. Оно представляет собой частный случай распределения Вейбулла при $a = 1$; $b = 1/T$. Плотность вероятности имеет вид $f_T(t) = (1/T)e^{-t/T}$. Эта функция при $T = 4$ изображена на рис. 3 штрихпунктирной линией. Ее дисперсия равна $D_T = 1/T^2$. Интеграл от плотности (функция распределения) имеет вид $F_T(t) = 1 - e^{-t/T}$. Отсюда субъективная вероятность того, что бомба взорвется не более чем через единичный интервал времени, составляет $p' = 1 - e^{-1/T}$. Эта величина не зависит от констант ε и η, характеризующих индивидуальную стратегию принятия решений.

При наличии у сапера некоторой дополнительной информации экспоненциальное распределение перестает адекватно отражать субъективные вероятности. Например, если известно, что преступник находится в том же здании, где он установил бомбу, то вряд ли он взорвет ее в ближайшее время, пока сам не окажется в безопасности. Для учета влияние подобных соображений на процесс принятия решения необходимо использовать двухпараметрическое распределение Вейбулла в общем виде, как рассматривалось выше.

Подведем итог. Субъективная вероятность катастрофы в результате действия d_1, обозначенная как р, падает с ростом индивидуальных констант ε и η. Субъективная вероятность катастрофы в течение ближайшего времени, делающая невозможным сбор информации, обозначенная как p', не зависит от ε и либо растет с ростом η, либо (в случае экспоненциального распределения) не зависит также и от этого параметра. Итак, в любом случае, чем выше значение каждой из индивидуальных констант ε и η, тем легче достигается неравенство $p' > p$ (взрыв в ближайшую единицу времени оценивается как более вероятный, чем взрыв в результате перерезания провода). Следовательно, более охотно будет выбираться действие d_1.

Таким образом, наиболее выраженную тенденцию к немедленному действию (в нашем примере — перерезанию провода) должны проявлять субъекты со стратегией *разумного риска* (высокие значения ε и η). Напротив, наибольшая склонность к сбору информации должна проявляться у субъектов со стратегией *избирательного избегания риска* (низкие значения ε и η). В первом случае опасность состоит в том, что априорные представления, подкрепленные крайне незначительными новыми данными, могут оказаться неверными (перерезать надо было все же не красный, а синий провод). Во втором случае есть опасность того, что субъект не успеет вовремя совершить необходимые действия (пока он анализировал ситуацию, бомба взорвалась).

Связь между тенденцией к немедленному действию и степенью склонности к риску (высокие значения ε) вполне естественна и интуитивно понятна. Значительно менее очевидна вытекающая из предложенной модели прямая связь между тенденцией к немедленному действию и склонностью к длительному сбору информации (высокие значения η). Психологическое объяснение этого вытекает именно из того, что подобная стратегия предполагает затраты значительного времени для анализа ситуации. Мы же рассматриваем стремительно развивающуюся аварийную или предаварийную ситуацию, которая заведомо не предоставляет такой возможности. В этих условиях человек, который обычно склонен к сбору информации, уже заранее понимает — или, скорее, эмоционально переживает — отсутствие шанса на получение того объема информации, который необходим ему для рационального принятия решения. Поэтому он отказывается от своей обычной стратегии и, особенно если у него высока устойчивость к опасности (высокие значения ε), фактически переходит к стратегии *экстремального риска*.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены два вида ситуаций, связанных с экстремально высокой вероятностью катастрофы. Первый вид таких ситуаций допускает нахождение решения, снижающего значимость возможного ущерба или его вероятность. Это «оплачивается» снижением ожидаемого значения функции полезности. Такой вариант можно назвать использованием страховки.

Второй вид экстремальных ситуаций не оставляет возможностей для «страховки». В этом случае производится выбор между немедленным действием в условиях явно недостаточной информации и исследованием ситуации, отсрочивающим — возможно, фатально — выполнение необходимых действий.

При управлении сложными технологическими процессами могут возникать ситуации как первого, так и второго типа. Предложенная модель позволяет приблизиться к пониманию природы индивидуальных различий между разными операторами в характере реакций на подобные ситуации. В частности, она позволяет объяснить парадоксальные случаи, когда в аварийной ситуации человек кардинально — и не всегда обоснованно — меняет стратегию принятия решений, присущую ему в обычных, не экстремальных условиях.

Полученные результаты после их экспериментальной верификации могут быть использованы в целях профотбора и профподготовки операторов.

Список литературы

1. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир. 1974.
2. *Фалин Г.И.* Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. М.: Анкил. 2007.
3. *Венгер А.Л.* Математическое моделирование эмоциональных процессов. // Автоматизация в промышленности. 2013. № 7.
4. *Венгер А.Л.* Математическое моделирование принятия решений в нестационарных ситуациях. // Автоматизация в промышленности. 2014. № 12.
5. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука. 1970.
6. *Ребро И.В., Носенко В.А., Короткова Н.Н.* Прикладная математическая статистика для технических специальностей. Волгоград: ИУНЯ ВолгГТУ. 2011.

Венгер Александр Леонидович *– д-р психолог. наук, проф. кафедры психологии Государственного университета природы, общества и человека «Дубна».*
E-mail: alvenger@gmail.com
Контактный телефон (916) 252- 23-53.