



СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ И СИСТЕМЫ НЕСВЯЗАННЫХ ОДНОМЕРНЫХ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ ДЛЯ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ИЗМЕНЕНИЯМИ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОИЗВОДСТВ¹

Е. А. Гребенюк (ИПУ РАН)

Рассматриваются методы построения контрольных карт, предназначенных для прогнозирования изменений во времени набора измеряемых лабораторией качественных показателей непрерывных химико-технологических процессов, которые могут привести к выходу их за технологические ограничения. Для контроля изменений набора показателей качества одного продукта при наличии автокорреляций между последовательными наблюдениями предложен алгоритм построения контрольной карты, использующий фильтрацию наблюдений специально разработанным фильтром без краевых эффектов и статистику Хотеллинга.

Ключевые слова: контрольные карты, фильтрация, карты Хотеллинга, автокоррелированные наблюдения.

Введение

Проблему прогнозирования выхода качественных показателей продукта, дискретно измеряемого в лаборатории, за заданные технологические ограничения для непрерывных производств можно успешно решить с использованием контрольных карт (КК). На большинстве предприятий значения качественных показателей получают в результате лабораторных анализов, которые выполняются достаточно редко, не чаще, чем через 4 часа. Качество конечного продукта зачастую оценивается набором достаточного большого числа показателей, каждый из которых не должен выходить за установленные технологические пределы. Выход за эти пределы может быть вызван как свойствами сырьевых потоков на входе или мелкими сбоями оборудования, так и серьезными нарушениями режима работы технологического процесса, которые необходимо оперативно устранить. Аппарат КК, впервые предложенных Шухартом в 1931 г. и получивших широкое развитие в мировой практике, позволяет эффективно отслеживать тенденцию изменения во времени как отдельного качественного показателя, так и набора качественных показателей и выявлять нарушения в ТП. Применение КК для непрерывных производств имеет свои особенности: наличие большого числа контролируемых показателей одного и того же продукта, наличие временных зависимостей как между последовательными значениями измеряемого показателя (автокорреляций), так и корреляций между значениями различных показателей.

В [1] были рассмотрены схемы наблюдения за изменением отдельного качественного показателя процесса, учитывающие основные особенности непрерывных производств, в которых использовалась одна

или несколько КК. В настоящей статье для процессов, описываемых набором качественных показателей одного и того же продукта, проводится сравнительный анализ эффективности применения системы одномерных не связанных между собой КК и многомерной контрольной карты, а также предлагается алгоритм построения КК для слежения за набором качественных показателей, использующий специально разработанный фильтр. Предложенный алгоритм построения КК основан на использовании низкочастотной фильтрации, вычислении по отфильтрованным данным статистики Хотеллинга и построении контрольных пределов.

Мониторинг ТП, качество которых описывается набором показателей, с применением КК

Процесс находится в режиме нормального функционирования, если его режимные параметры не выходят за границы, величина которых определяется технологическими ограничениями. Задача технолога — своевременное определение изменений в процессе, которые могут привести к выходу качественных показателей за технологические ограничения. КК [1] представляют функции от измеренных значений качественных показателей в виде временного графика, на котором нанесены три горизонтальные прямые линии. При получении одного или нескольких последовательных измерений одного качественного показателя на график наносится значение заданной функции от этих измерений. Центральная линия определяет целевое значение функции, верхняя и нижняя линии, определяющие границы ее изменения, лежат соответственно выше и ниже центральной линии и называются верхним и нижним контрольными пределами. Функция и контрольные пределы рассчитываются

¹ Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ 13-08-01309.

таким образом, чтобы выход значений КК за контрольные пределы служил сигналом о наличии в процессе изменений, которые могут привести к выходу качественных показателей за границы, определяемые технологическими ограничениями. Если качество продукта оценивается не одним, а несколькими показателями, то для отслеживания изменений можно использовать одну общую КК для всех показателей или набор КК для каждого из них. Если слежение за несколькими показателями одного продукта выполняется с использованием системы не связанных между собой КК, то зависимости между показателями не учитываются и, следовательно, не могут быть обнаружены изменения в связях между показателями, которые еще не привели, но могут привести к выходу за технологические ограничения.

Учет взаимосвязей между показателями может выполняться с применением КК, значения которой вычисляются по набору всех контролируемых ею показателей (пробы которых взяты в один и тот же момент времени). Такая КК называется многомерной. Каждая точка на графике КК может быть результатом обработки группы измерений, полученных за несколько последовательных моментов времени, или результатом обработки группы измерений за один момент времени, в последнем случае КК называют картой индивидуальных наблюдений. Так как лабораторные анализы ТП выполняются достаточно редко, то для них обычно используют карты индивидуальных наблюдений. Разработано большое число алгоритмов построения как одномерных [1], так и многомерных КК [2], предназначенных для обнаружения различных изменений качественных показателей для процессов с различными свойствами. Например карты, обнаруживающие сдвиги средних значений, карты, обнаруживающие изменения дисперсии, карты для автокоррелированных показателей, многомерные КК для коррелированных и некоррелированных показателей и др. Применение многомерной КК вместо набора одномерных является целесообразным по ряду причин:

1) в условиях большой размерности сокращение числа отслеживаемых показателей облегчает процесс контроля;

2) одновременное отслеживание совокупности показателей позволяет учитывать не только изменения в отдельных показателях, но и изменения связей между ними, являющиеся сигналом о наличии нарушений, которые могут привести к выходу показателей за технологические пределы.

При построении КК ее значения вычисляются с использованием формул, заложенных в алгоритме данной КК, и текущих измерений качественных показателей, полученных в результате лабораторных анализов. Для эффективного отслеживания изменения контролируемого процесса с помощью КК в ее алгоритме предусмотрены настроечные параметры,

которые вычисляются для каждого конкретного процесса на основе анализа исторических данных — прошлых лабораторных анализов. Примером таких параметров являются значения контрольных пределов, перечень других параметров определяется конкретным алгоритмом КК.

Поскольку одной из основных проблем, затрудняющих применение КК на непрерывных производствах (как отмечено в [1]), является наличие автокорреляций (корреляций между последовательными наблюдениями одного и того же показателя) и корреляций между показателями, анализ эффективности КК проводится на примерах показателей двух различных продуктов. Оба примера используют реальные значения качественных показателей процессов на установке АВТ (атмосферно-вакуумная трубчатка) нефтеперерабатывающего завода. Качество каждого из продуктов описывается двумя показателями. В первом примере показатели автокоррелированы, но не коррелированы между собой, во втором — уровень автокорреляций незначителен, но между показателями существует взаимная корреляция².

Применение системы одномерных, не связанных между собой КК для анализа нескольких качественных показателей одного продукта

Пример 1. Проследим за изменениями двух качественных показателей М1 и N1, которые берутся с интервалом в 4 часа, при наличии технологических ограничений. По технологическим причинам значения показателя М1 ограничены снизу, а показателя N1 — сверху. Значения показателей на графике представлены в виде отдельных точек, границы технологических ограничений — в виде прямых линий.

Как видно из рис. 1, значения показателя М1, начиная с конца 15-х суток, а значения показателя N1, начиная с середины 17-х суток, выходят за технологические ограничения, а на интервале настройки (слева от вертикальной линии) процесс находится в режиме нормального функционирования.

Процесс построения КК включает: анализ процесса по историческим данным, выбор алгоритма КК и настройки ее параметров. Для проверки наличия зависимостей в контролируемых показателях построим: взаимную корреляционную функцию (ВКФ) показателей и автокорреляционные функции (АКФ) для каждого из них на интервале нормального функционирования. Построенные функции представлены на рис. 2а-2с; по вертикальной оси отложены значения АКФ показателей М1 и N1 (рис. 2а, 2б соответственно), и их взаимной корреляционной функции (ВКФ, рис. 2с). Из представленных рисунков видно, что между значениями показателя М1 существуют достаточно сильные автокорреляции (значения коэффициентов автокорреляции через 4 и 8 часов равны $\rho_1=0,6$ и $\rho_2=0,5$), уровень автокорреляций показателя N1 значительно

² Здесь и далее для краткости все результаты описываются для набора из двух показателей. Однако они могут быть использованы для любого числа показателей, описывающих продукт.

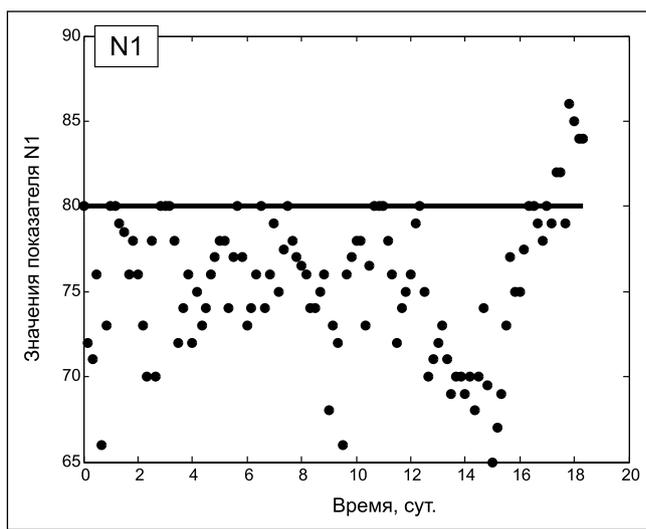
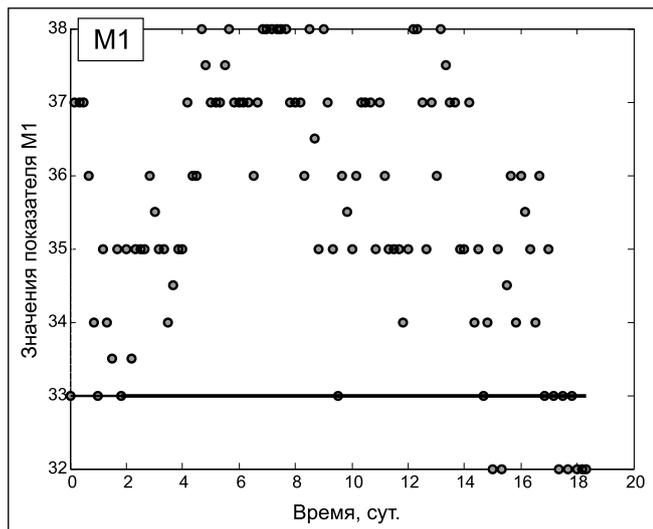


Рис. 1. Лабораторные анализы и границы технологических ограничений показателей M1 и N1.

ниже ($\rho_1=0,2$), но как следует из результатов многочисленных исследований, даже наличие автокорреляций такого уровня ухудшает качество прогнозирования. Значения коэффициента корреляции между показателями, представленные на рис. 2, указывают на отсутствие значимой корреляции между ними.

В отсутствие корреляционных связей между показателями поведение каждого из них может контролироваться одной или несколькими КК независимыми от КК других показателей, однако построение многомерной КК может оказаться более эффективным и лучше объяснить связи между процессами. Это может произойти, например, при нарушениях режима нормального функционирования в процессе возникают изменения, при которых между показателями образуются кратковременные корреляционные связи.

Фрагмент показателя N1 (с 10-х по 18-е сутки) рассматривался в статье [1]. На основе анализа исторических данных для слежения за изменением показателя была выбрана пара КК: EWMA КК для обнаружения изменений среднего по остаткам модели и карта экспоненциально взвешенного квадрата среднего — EWMS, описание которой приведено ниже. Обе эти карты используют метод экспоненциального сглаживания.

Карта экспоненциально взвешенного скользящего среднего (Exponentially Weighted Moving Average — EWMA) [1] является одной из широко применяемых КК. Она эффективна при обнаружении малых

и средних изменений среднего значения показателя, а также менее чувствительна к отклонениям данных от нормальности и наличию автокорреляций. Алгоритм EWMA:

$$z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda)z_{t-1}, \tag{1}$$

где λ — настроечный параметр, x_t — значение анализа в момент времени t , z_t — значение КК в момент времени t . Если наблюдения независимы и одинаково распределены с дисперсией σ^2 , то дисперсия z_t стремится к величине $\frac{\lambda}{2 - \lambda} \sigma^2$, что позволяет определить

верхний контрольный предел LCL и нижний контрольный предел UCL как:

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{x} + G\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}, \\ UCL &= \bar{x} - G\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \end{aligned} \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}^2$ — выборочная дисперсия показателя, вычисленная по историческим данным в режиме нормального функционирования, λ и G — настроечные параметры алгоритма, \bar{x} — оцененное среднее процесса. Предлагается использовать значения $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ и $2,6 \leq G \leq 3$ (www.itl.nist.gov/div898/handbook).

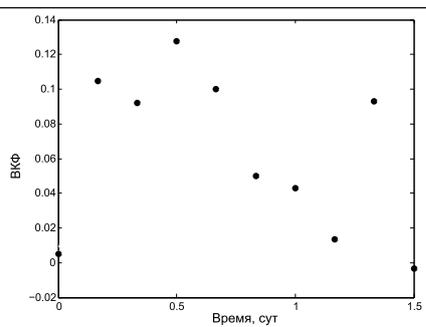
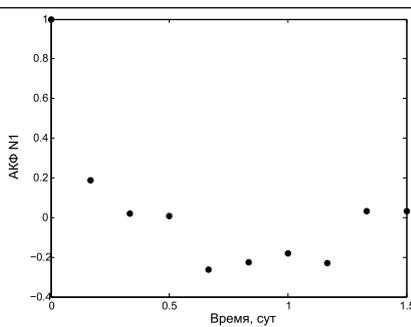
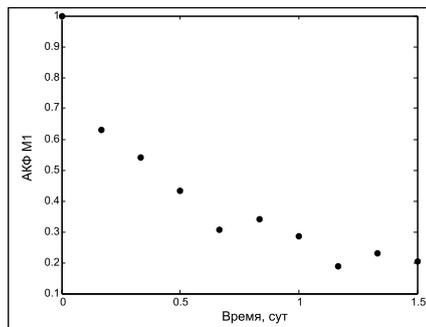


Рис. 2а. АКФ показателя M1

Рис. 2б. АКФ показателя N1

Рис. 2с. ВКФ показателей M1 и N1

Известны два основных подхода к использованию карты EWMA при наличии автокорреляций. В соответствии с методом «контроль по остаткам модели» по данным, полученным в режиме нормального функционирования, строится модель авторегрессии вида:

$$\hat{x}_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \dots + a_k x_{t-k} + e_t, \quad (3)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ — параметры, оцененные по наблюдениям процесса в прошедшие моменты времени x_{t-k}, \dots, x_{t-1} , $e_t = x_t - \hat{x}_t$ — отклонения измеренных значений показателя от модели процесса в момент времени t («остатки»).

Одним из основных критериев построения качественной авторегрессионной модели являются свойства получаемых отклонений: они должны иметь нулевое среднее, постоянную дисперсию и быть некоррелированными. Модель авторегрессии описывает широкий класс процессов, однако существуют процессы, более точное описание которых можно получить с использованием моделей «скользящего среднего» или модели «проинтегрированной авторегрессии — скользящего среднего». Методы построения авторегрессионных моделей широко известны, подробно описаны в литературе [3] и реализованы во многих статистических пакетах (Matlab, Statistika, NPSS и пр.). По сути, такая модель представляет собой линейный фильтр, убирающий из процесса высокочастотные некоррелированные возмущения. Для построения КК на ее вход подаются отклонения от модели — остатки e_t , которые являются не автокоррелированными или слабо автокоррелированными. При отклонении процесса от модели остатки изменяют свои свойства: может измениться их среднее или дисперсия. КК в зависимости от ее назначения отслеживает изменения среднего или дисперсии остатков. Карта EWMA, построенная по остаткам модели, часто используется для обнаружения сдвига в среднем для автокоррелированных данных [4].

При втором подходе EWMA применяется к исходным данным. На производстве полученные данные анализов загрязнены шумами, которые могут представлять собой последовательность независимых одинаково распределенных наблюдений (белый шум), синусоидальный шум или линейную комбинацию белых шумов. Если КК представляет собой фильтр, сохраняющий колебания низких частот и очищающий процесс от шумов, то тенденция приближения отфильтрованных значений показателя к рассчитанным контрольным пределам служит прогнозом выхода процесса за норму. При соответствующем выборе параметра λ EWMA можно рассматривать как такой линейный фильтр. Учитывая, что процесс может оставаться в режиме нормального функционирования при изменении средних значений качественных показателей в достаточно широком диапазоне, его можно представить в виде суммы

трендовой составляющей, отражающей изменения среднего процесса и флуктуаций относительно этой составляющей:

$$x_t = \theta_t + N_t,$$

где N_t — автокоррелированная помеха с нулевым средним, описываемая моделью:

$$\hat{N}_t = a_1 N_{t-1} + \dots + a_k N_{t-k} + \delta_t,$$

где $\delta_t = N_t - \hat{N}_t$ — отклонение модели от процесса, θ_t — среднее процесса, изменяющееся во времени, которое описывается моделью:

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

ε_t — последовательность независимых одинаково распределенных наблюдений с нулевым средним и дисперсией $\sigma > 0$. Применение EWMA карты к процессам с автокоррелированной помехой позволяет снизить, а для определенных типов процессов полностью устранить [5] автокорреляции и получить процесс типа (4).

Для контроля одного показателя в [6] было предложено использовать одновременно две КК EWMA: одну для обнаружения изменений среднего процесса, другую — для изменения дисперсии. Карта EWMA для обнаружения изменения дисперсии получила название EWMS (Exponentially Weighted Mean Square) — экспоненциально взвешенного квадрата среднего [6], она рассчитывается по формуле:

$$w_t = \lambda(x_t - \theta)^2 + (1 - \lambda)w_{t-1},$$

где w_t — значение КК, λ — настроечный параметр, θ — выборочное среднее (θ оценивается по значениям показателя в режиме нормального функционирования процесса), x_t — наблюдения. Контрольные пределы EWMS рассчитываются как:

$$LCL = \hat{\sigma}^2 + G\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}},$$

$$UCL = \hat{\sigma}^2 - G\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}},$$

где $\hat{\sigma}^2$ — выборочная дисперсия показателя, вычисленная по историческим данным в режиме нормального функционирования λ, G — настроечные параметры.

Применим систему из EWMA и EWMS КК для слежения за процессами M1 и N1. Для сравнения двух КК обнаружения изменения среднего рассмотрим: EWMA1, построенную по остаткам модели и EWMA2, построенную по исходным данным, для обнаружения изменений дисперсии — КК EWMS. На рис. 3а и 3б приведены графики процессов M1 и N1, по вертикальным осям отложены значения качественных показателей и технологических ограничений, на рис. 3с–3h — графики КК и их контрольные пределы, по вертикальным осям отложены значения КК и их контрольных пределов.

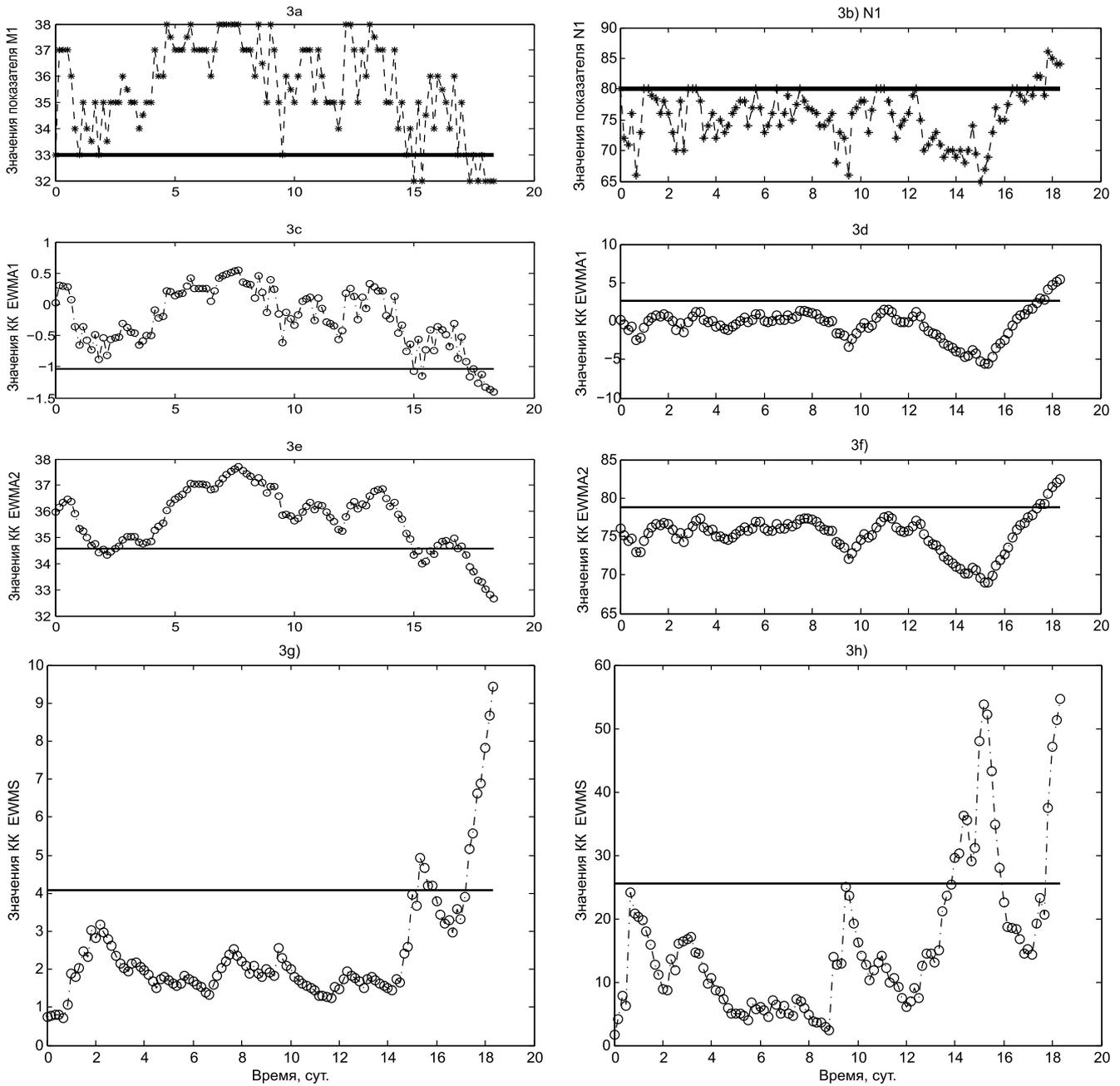


Рис. 3. Графики процессов M1 (3a) и N1 (3b), контрольных карт EWMA1 (3c,3d), EWMA2 (3e,3f), EWMS(3g,3h), где — контрольные пределы КК и технологические ограничения показателей, *—* - графики показателей, оооо – графики КК³.

Рассмотрим результаты прогнозирования с использованием КК. Обе контрольные карты EWMA1 и EWMA2 выходят за контрольные пределы одновременно с выходом контролируемых показателей M1 и N1 за технологические ограничения, но карта EWMA2 для показателя M1 в середине третьих суток дает ложный предупреждающий сигнал. Карта EWMS дает сигнал об увеличении дисперсии процесса N1 на 14-е сутки, что указывает на выход процесса из режима нормального функционирования, для показателя M1 выход EWMS за контрольные

пределы происходит одновременно с выходом его за технологические ограничения.

Таким образом, при использовании системы одномерных КК заблаговременно (на 14 –е сутки) поступает сигнал о выходе процесса из режима нормального функционирования. Результаты применения карт EWMA1 и EWMA2 не показали существенных различий при их применении, но карты EWMA2 могут чаще давать ложные сигналы, что подтверждается исследованиями, проведенными в [6]. Результаты совпадают с результатами применения КК EWMA1 и EWMS для

³ Аналогичные обозначения сохраняются на рис. 5, 7-10.

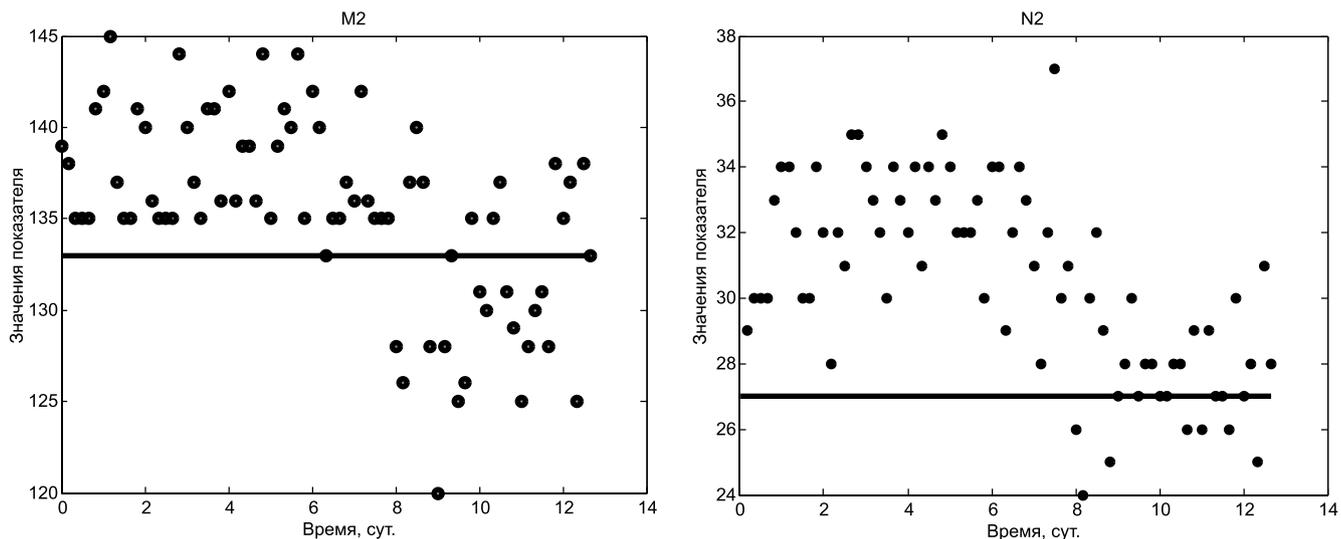


Рис.4 Лабораторные анализы и границы технологической нормы показателей M2 и N2.

показателя N1 приведенными в статье [1], в ней приведен фрагмент графиков 3b, 3d, 3h, построенных на интервале с 10-х по 18-е сутки.

Пример 2. Пусть значения показателей M2 и N2 (Рис. 4), начиная с восьмых суток, выходят за технологические ограничения. Проведенный анализ автокорреляций M2 и N2 и корреляции между M2 и N2 показал, что коэффициент корреляции между значениями показателей M2 и N2 равен 0,5,

если они определяются по пробам, взятым в один и тот же момент времени. Если показатели измеряются в разное время, то корреляция отсутствует. Коэффициент корреляции для показателя N2 между последовательными значениями анализов, взятых через 4 часа, равен $\rho_1=0,3$ и равен нулю для показателя M2, что говорит о низком уровне автокорреляций обоих показателей в режиме нормального функционирования процесса.

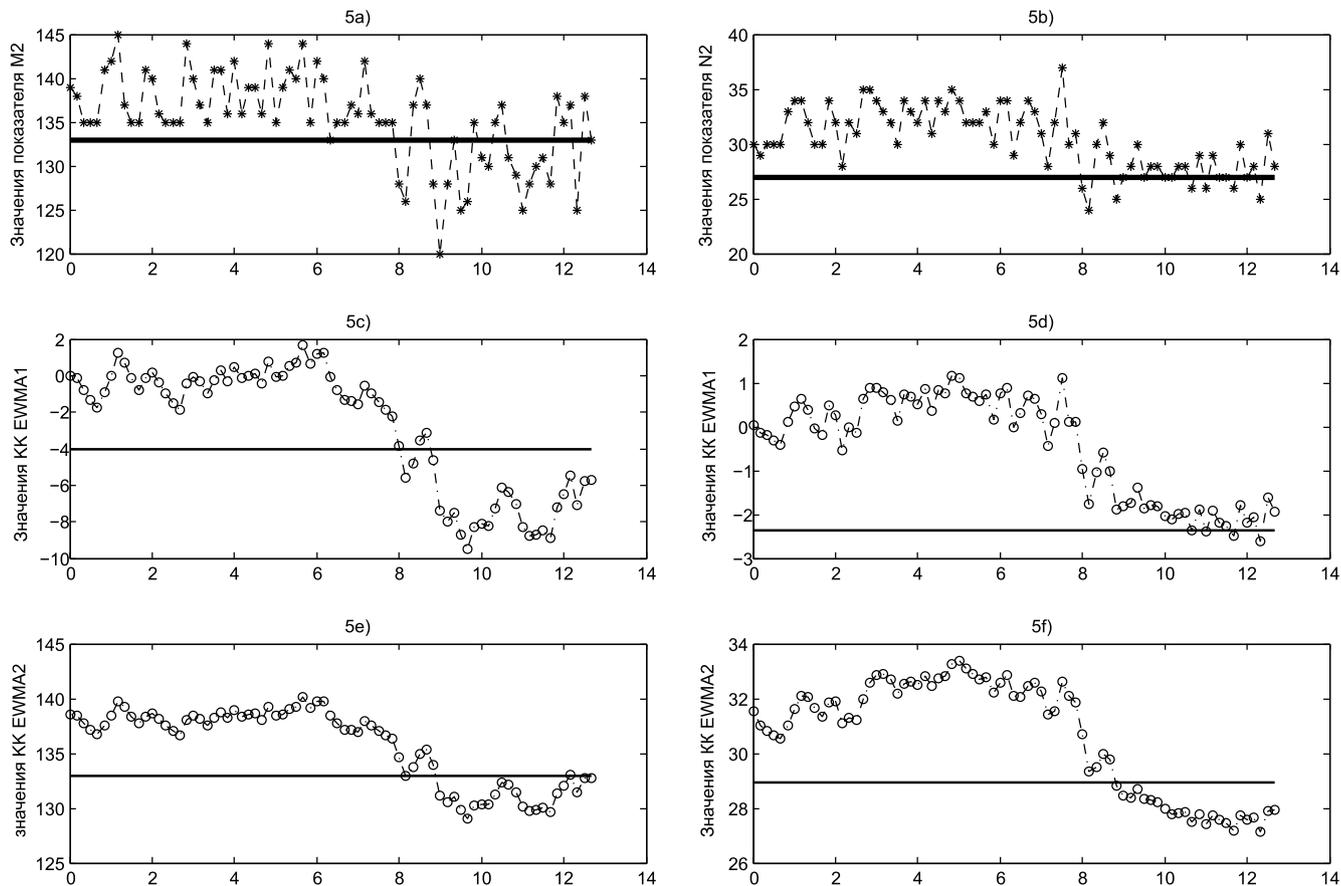


Рис. 5. Графики процессов M2 (5a) и N2 (5b), контрольных карт EWMA1 (5c,5d), EWMA2 (5e,6f), EWMS (5g,5h), контрольные пределы КК и технологические ограничения показателей.

Продолжение рисунка 5

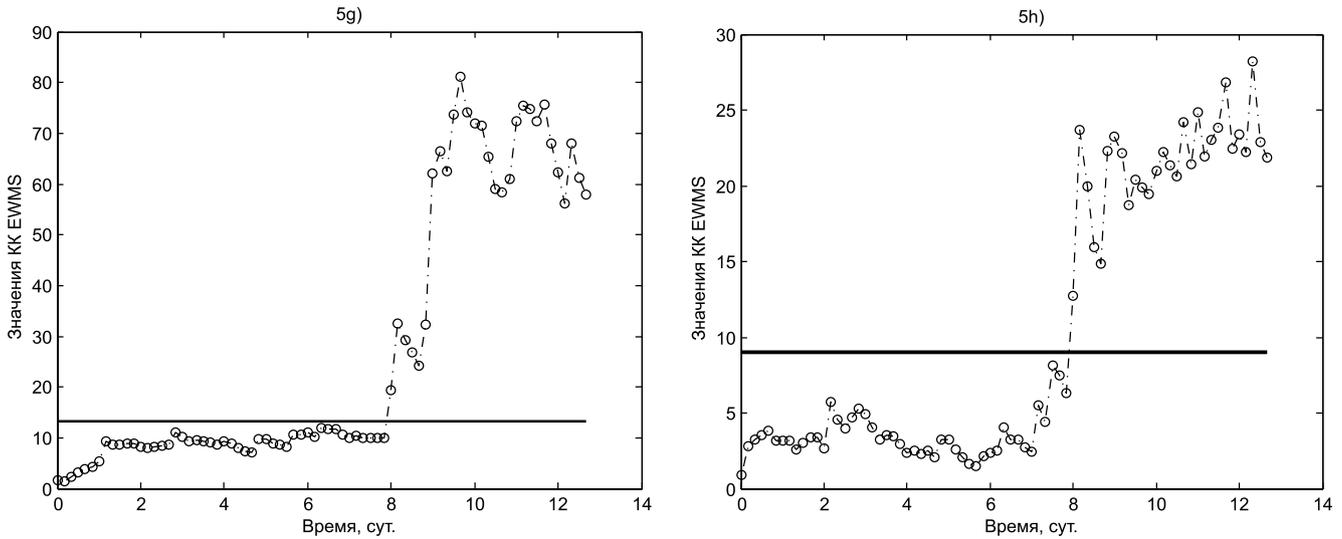


Рис. 5. Графики процессов M2 (5a) и N2 (5b), контрольных карт EWMA1 (5c,5d), EWMA2 (5e,6f), EWMS (5g,5h), контрольные пределы КК и технологические ограничения показателей.

Построим систему одномерных карт для показателей M2 и N2: EWMA1, EWMA2 и EWMS (рис. 5).

В отличие от предыдущего примера ни одна из КК не дает предупреждения о выходе процесса за технологические ограничения, наоборот, предупреждающий сигнал КК поступает с запаздыванием для всех рассматриваемых карт.

При визуальном анализе графиков показателей M2 и N2 трудно заметить какие-либо признаки выхода процесса за технологические ограничения на восьмые сутки. Если наложить на график результат фильтрации алгоритмом экспоненциального сглаживания (1) — карту EWMA2, то можно отметить, что фильтрация отображает изменения тренда и максимумы значений реального показателя с запаздыванием.

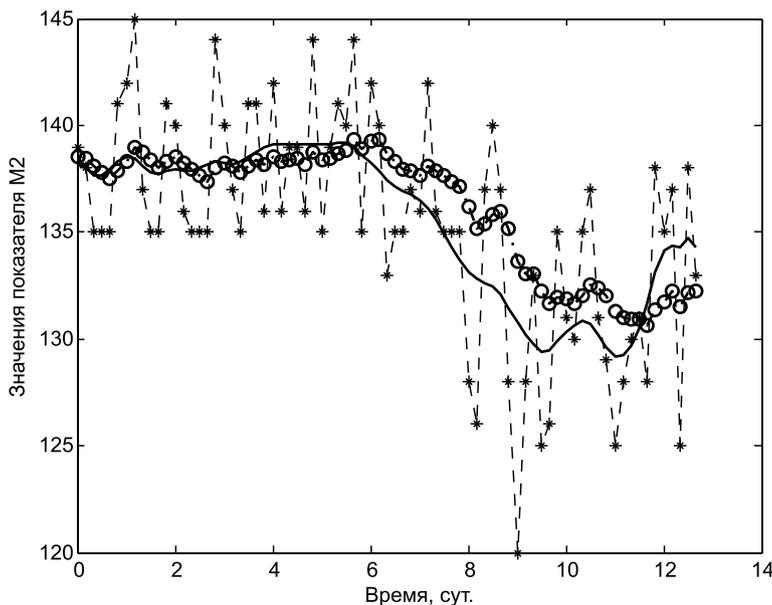


Рис. 6. Графики наблюдаемого процесса -*-*-*-, сглаженного алгоритмом EWMA2 - ооо, и процесса, отфильтрованного ФБК - ____.

В работе [7] разработан фильтр низких частот без краевых эффектов (ФБК), предназначенный для фильтрации в режиме получения наблюдений. Полученный фильтр позволяет выбрать такую ширину полосы низких частот, чтобы снизить уровень случайных возмущений, кроме того, он практически не имеет запаздывания за счет уменьшения краевых эффектов фильтрации (искажений, возникающих на концах интервала фильтрации). Настройка параметров фильтра выполняется на участке $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $m < t$, на котором процесс находится в режиме нормального функционирования.

На рис. 6 представлены результаты фильтрации с использованием EWMA и разработанного в [7] фильтра низких частот без краевых эффектов (ФБК), показывающие существенное уменьшение запаздывания предложенного фильтра по сравнению с фильтром EWMA.

Контрольные пределы ФБК рассчитываются по формулам:

$$LCL = \bar{x} + G\hat{\sigma}$$

$$UCL = \bar{x} - G\hat{\sigma}$$

где \bar{x} — среднее значение отфильтрованного процесса, $\hat{\sigma}$ — его выборочная дисперсия, рассчитанная по историческим данным, G — настроечный параметр, выбираемый в интервале 2,6–3. Если вместо фильтрации по EWMA использовать фильтр ФБК, то построенная КК (фильтр ФБК), обнаруживает изменения среднего показателя M2 заранее, в конце седьмых суток, а изменения среднего показателя N2 одновременно с выходом за технологические ограничения — в начале восьмых суток (рис. 7).

Вернемся к примеру 1 и построим КК для обнаружения изменения среднего с ис-

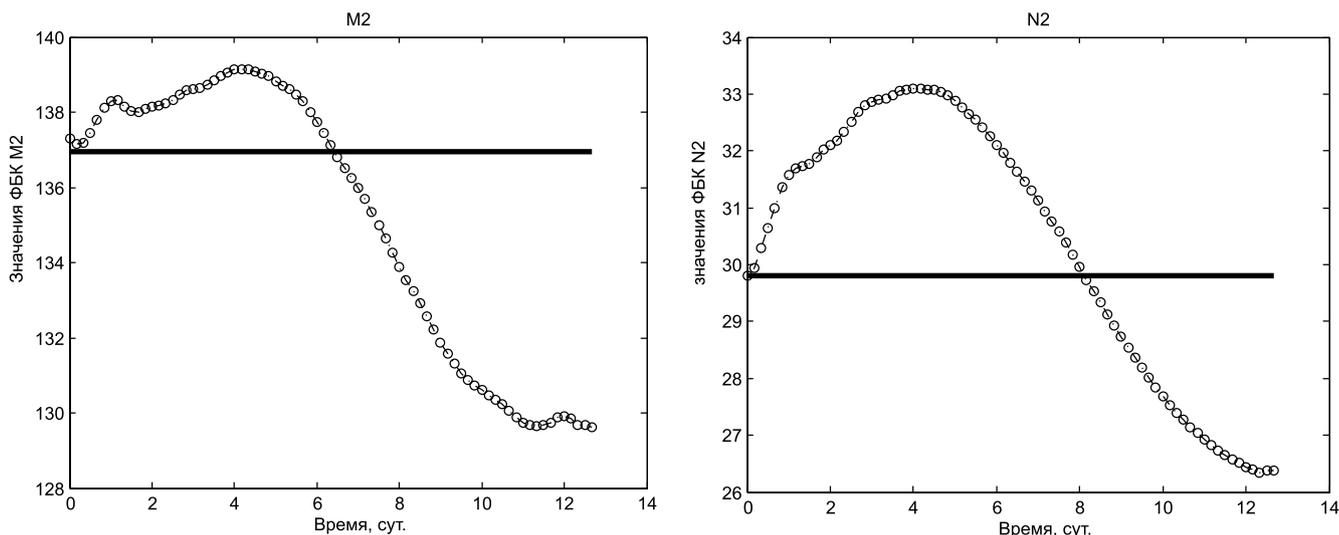


Рис.7. КК «фильтр ФБК» для изменения среднего, построенные для слежения за показателями M2 и N2 и их контрольные пределы.

пользованием карты фильтр ФБК для показателей M1 и N1 (рис.8)..

Построенная карта обнаруживает изменения среднего показателя M1 заранее (в начале 14-х суток), а изменения среднего показателя N1 в середине 16-х суток (до выхода показателей за технологические ограничения).

Таким образом, применение фильтрации с использованием фильтра, построенного в [7], позволяет сократить запаздывание КК при обнаружении изменений среднего.

Построение многомерных КК

Рассмотрим применение многомерных КК к набору показателей и сравним результаты применения системы одномерных, не связанных между собой КК, и многомерных. Карты, рассмотренные в настоящей статье, используют статистику, впервые предложенную Хотеллингом [8]. Многомерная карта Хотеллинга является одной из наиболее известных КК, принцип построения которой рассмотрим на примере двух показателей

и продемонстрируем затем ее работу на примерах 1 и 2. Рассмотрим многомерную КК Хотеллинга в случае двух показателей. Пусть

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \tag{5}$$

— результаты анализов качественных показателей x_1, x_2 полученные за период времени $t=1,2,\dots,m$ в котором процесс находился в режиме нормального функционирования, где $X_t = (x_{t1}, x_{t2})$ — их значения в момент времени t . По набору данных (5) вычисляются настроечные параметры алгоритма: выборочные оценки вектора средних, векторов дисперсий и ковариации. Выборочная оценка вектора средних равна: $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, где компоненты \hat{X} представляют собой средние арифметические результатов анализов для каждого показателя:

$$\hat{x}_j = \frac{\sum_{p=1}^m x_{pj}}{m}, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

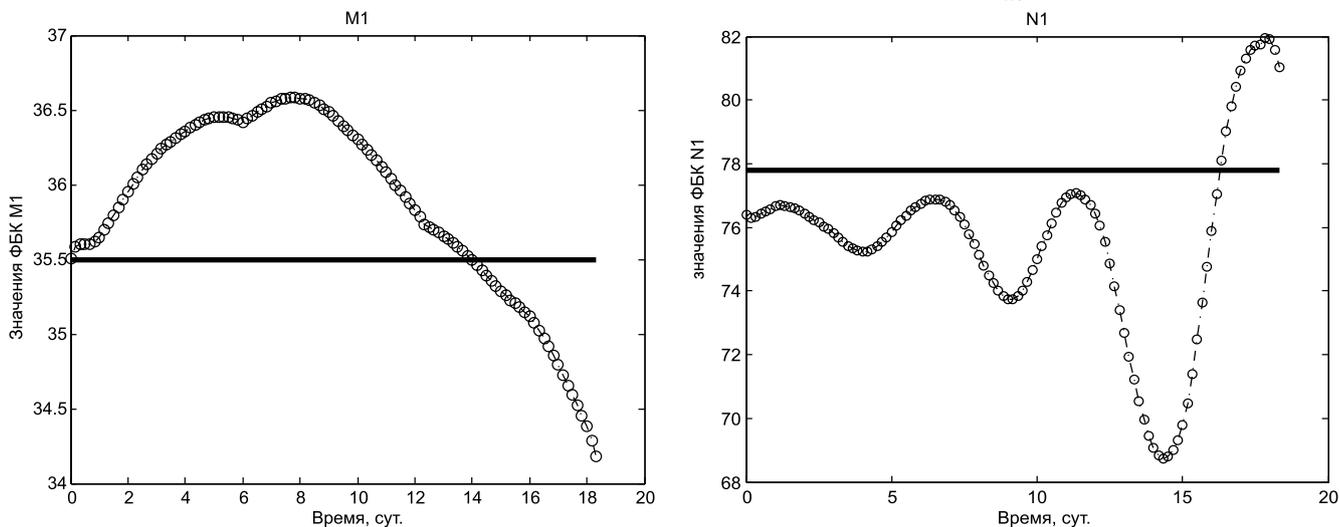


Рис.8. КК «фильтр ФБК» для обнаружения изменения среднего, построенные для показателей M1 и N1 и их контрольные пределы.

Выборочные оценки дисперсий s_1, s_2 первой и второй компонент и выборочная оценка ковариации s_{12} между компонентами, вычисляются по формулам:

$$s_j = \frac{\sum_{p=1}^m (x_{pj} - \hat{x}_j)^2}{m-1}, \quad j = 1, 2 \quad s_{12} = \frac{\sum_{p=1}^m (x_{p1} - \hat{x}_1)(x_{p2} - \hat{x}_2)}{m-1}. \quad (7)$$

Статистика Хотеллинга T_t^2 для двух показателей рассчитывается по формуле:

$$T_t^2 = \frac{s_2(x_{t1} - \hat{x}_1)^2 - 2s_{12}(x_{t1} - \hat{x}_1)(x_{t2} - \hat{x}_2) + s_1(x_{t2} - \hat{x}_2)^2}{s_1s_2 - s_{12}^2} \quad (8)$$

где \hat{x}_1, \hat{x}_2 — значения средних процесса, вычисленные по формуле (6), s_1, s_2, s_{12} вычислены по формулам (7).

Статистику Хотеллинга обычно представляют в матричном виде:

$$T_t^2 = (X_t - \hat{X})\hat{S}^{-1}(X_t - \hat{X})', \quad t = 1, 2, \dots, m, \quad (8a)$$

где $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ — вектор средних, \hat{S}^{-1} — ковариационная матрица, обратная ковариационной матрице \hat{S} , компоненты которой вычисляются по формулам (7), в случае двух показателей она имеет вид:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} s_1 & s_{12} \\ s_{12} & s_2 \end{pmatrix}.$$

При осуществлении контроля с использованием карты Хотеллинга для каждого вновь полученного наблюдения $X_t = (x_{1t}, x_{2t})$, $t > m$ в момент времени t вычисляются значения КК по формуле (8). Поскольку

эта статистика не отрицательная, то для нее достаточно вычислить только верхний контрольный предел. Известно распределение этой статистики, если компоненты наблюдаемого процесса (5) распределены по нормальному закону. Если свойства наблюдаемого в реальном времени процесса не меняются, то с вероятностью 0,95% величина T_t^2 будет удовлетворять неравенству:

$$T_t^2 \leq \frac{2(m+1)(m-1)}{m(m-2)} F_{0.95, 2, m-2},$$

где $F_{0.95, 2, m-2}$ — табличное значение случайной величины, распределенной по закону Фишера со степенями свободы $2, m-2$ [9] и уровнем доверительной вероятности. Таким образом, величина контрольного предела равна:

$$UL = \frac{2(m+1)(m-1)}{m(m-2)} F_{0.95, 2, m-2} \quad (9)$$

и зависит от числа контролируемых качественных показателей и уровня доверительной вероятности. При превышении статистикой T_t^2 значений верхнего предела (9) подается сигнал о наличии изменений в процессе, которые могут привести к отклонению процесса от режима нормального функционирования.

Для повышения чувствительности многомерных КК Хотеллинга к малым и средним сдвигам были разработаны многомерные карты MEWMA [2, 10]. Эти карты являются расширением соответствующих одномерных карт EWMA на многомерный случай. Каждый качественный показатель, описывающий процесс, обрабатывается с использованием алгоритма (1). При построении карты MEWMA, как и для EWMA, используется два подхода: 1) вычисление модели (3) для каждого показателя и сглаживание остатков модели по формуле (1), 2) фильтрация каждого исходного показателя по формуле (1). По отфильтрованным значениям показателей строится статистика Хотеллинга. Карту, построенную с использованием первого подхода, обозначим MEWMA1, а с использованием второго — MEWMA2. Но как уже было отмечено при рассмотрении системы одномерных, несвязанных между собой карт, фильтрация показателей с использованием EWMA имеет запаздывание и не всегда позволяет убрать полностью автокорреляции. Поэтому рассмотрим многомерную КК с использованием фильтра ФБК. Настройка фильтра ФБК выполняется по историческим данным методами, изложенными в [7]. Применим к исходным данным фильтрацию ФБК и вычислим для отфильтрованных данных статистику Хотеллинга. Такую карту будем называть «многомерный фильтр ФБК».

На рис. 9-10 представлены результаты работы КК для слежения за показателями M1 и N1 и M2 и N2, соответственно построенных с использованием следующих КК: Хотеллинга, MEWMA1, MEWMA2, «много-

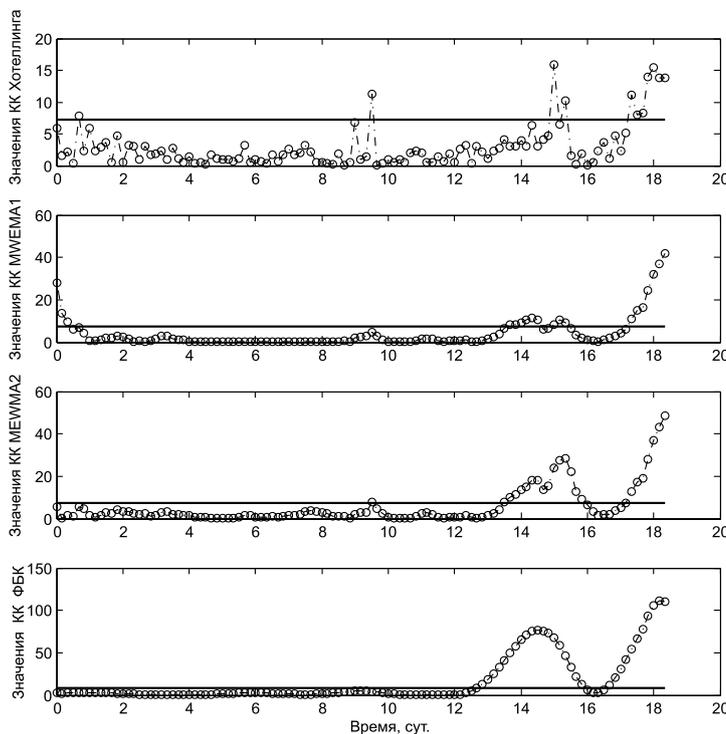


Рис. 9. Графики КК и их контрольные пределы для показателей M1 и N1

мерный фильтр ФБК». На верхнем рисунке представлена КК Хотеллинга, на следующих КК MEWMA1 и MEWMA2 соответственно, на нижнем рисунке — «многомерный фильтр ФБК», горизонтальными линиями обозначены контрольные пределы, по вертикальной оси отложены значения КК.

Стандартная КК Хотеллинга дает два ложных сигнала и обнаруживает изменения одновременно с выходом показателей за технологические ограничения. КК MEWMA1 обнаруживает изменения в процессе в конце 13-х суток, MEWMA2 — в середине 13-х суток, но имеет один ложный сигнал. КК, построенная с использованием разработанного фильтра, указывает на наличие изменений в конце 12-х суток. Напомним, что применение системы одномерных КК для примера 1 обнаруживает изменения в конце 13-х суток, если для обнаружения изменения среднего используется КК «фильтр ФБК» и в начале 14-х суток.

На рис. 10 показаны результаты применения построенных КК к показателям M2 и N2. Стандартная КК Хотеллинга обнаруживает изменения заблаговременно, в середине 7-х суток. Карты MEWMA1 и MEWMA2 обнаруживают изменения с запаздыванием — на 9-е и 8-е сутки соответственно. Карта «многомерный фильтр ФБК» позволяет обнаружить сигнал в конце шестых суток. Для примера 2 система одномерных КК обнаруживает изменения только после фактического выхода показателей за контрольные пределы при использовании карт EWMA1 и EWMA2 для обнаружения изменения среднего и в конце седьмых суток при обнаружении изменения среднего КК «фильтр ФБК».

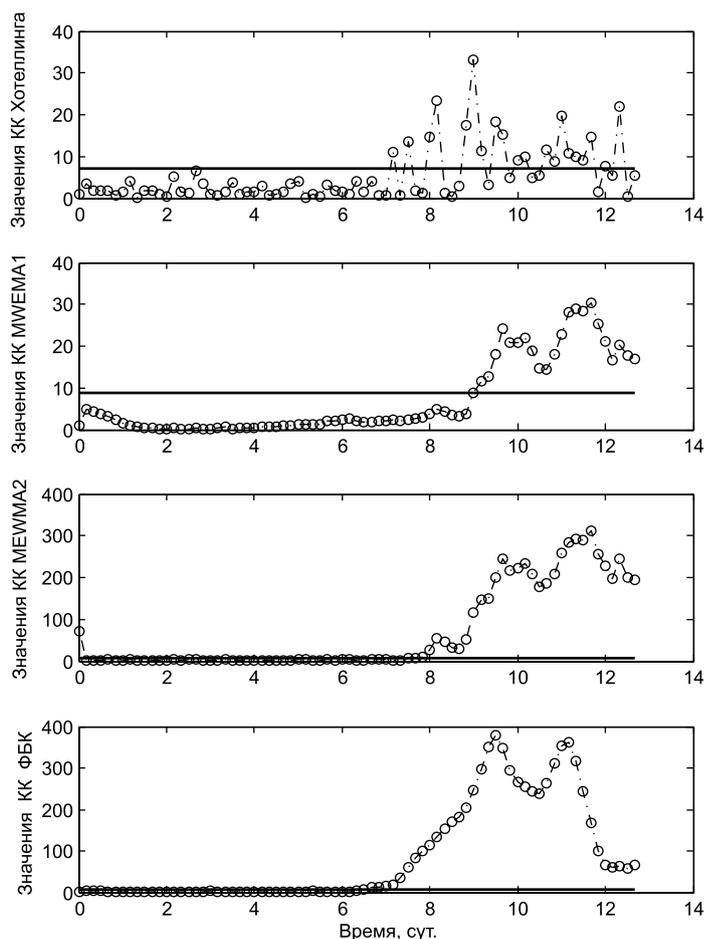


Рис. 10. Графики КК и их контрольные пределы для показателей M2 и N2

Заключение

Таким образом, применение поточечной фильтрации, позволяющей выделить из сигнала низкочастотную составляющую без краевых эффектов (искажений в конце интервала наблюдения) позволяет существенно повысить эффективность КК. Многомерные КК могут снизить запаздывание в обнаружении по сравнению с системой не связанных одномерных карт. Применение статистики Хотеллинга для построения многомерной КК позволяет сократить число КК по сравнению с системой не связанных КК. Проверка работоспособности предложенной многомерной КК с ФБК показала, что разработанная карта позволяет своевременно обнаружить изменения в процессе и уменьшает величину запаздывания в обнаружении.

Список литературы

1. Гребенюк Е.А. Особенности применения контрольных карт для слежения за изменениями качественных показателей процессов непрерывных производств // Автоматизация в промышленности. 2014. № 10. С. 37-42.

Гребенюк Елена Алексеевна — д-р техн. наук, главный научный сотрудник ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН.
Контактный телефон (495) 334-90-21.

2. Bersimis S., Psarakis S. and Panaretos J. Multivariate Statistical Process Control Charts: An Overview// Qual. Reliab. Engng. Int. 2007. V. 23. pp. 517-543.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Пер. с англ. 1974. Мир. С. 72-73.
4. Reynolds M. R., Stoumbos Z. G. Comparisons of Some Exponentially weighted Moving Average Control Charts for Monitoring the Process Mean and Variance//Technometrics. 2006. V.48 (4). pp. 550-567.
5. Thavaneswaran A., Macpherson B. D., Abraham B. An Application of Filtering to Statistical Process Control. Statistics for Industry and Technology. 1998. pp/ 109-120.
6. MacGregor J. F. and Harris T. J. The exponentially weighted moving variance // Journal of Quality Technology, 1993. V.25(2). pp. 106-118.
7. Гребенюк Е.А. Фильтрация нестационарных сигналов с использованием фильтра Калмана// Тр. междунар. конф. «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2013». ИПУ РАН. 2013. С. 326-336.
8. Hotelling H., Eisenhart C, Hastay M.W., Wallis W.A. (eds.). Multivariate quality control-illustrated by the air testing of sample bombsights. Techniques of Statistical Analysis. McGraw-Hill: NewYork. 1947. pp.111-184.
9. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Высшая школа. 2003. 408 с.
10. Lowry C. A., Woodall W. H., Champ C. W., Rigdon S. E. A multivariate EWMA control chart // Technometrics. 1992. V.34. pp.46-53.